

Алгоритм Евклида

Определение. Наибольший общий делитель целых чисел a и b — это наибольшее натуральное число c такое, что a делится на c и b делится на c . Обозначается $\text{НОД}(a, b)$ или просто (a, b) . Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел. Целые числа a и b называются *взаимно простыми*, если $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Во всех задачах этого занятия латинскими буквами обозначаются целые числа (и даже натуральные, если не оговаривается иное).

1. Пусть $a \geq b$. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$.
2. (шаг алгоритма Евклида) Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Поделим a и b с остатком: $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

Алгоритм Евклида. Для вычисления $\text{НОД}(a, b)$ начнём с пары чисел (a, b) и будем применять шаги, описанные в предыдущей задаче. При каждом переходе от пары (делимое, делитель) к паре (делитель, остаток) оба числа в паре уменьшаются, а их НОД сохраняется. В некоторый момент получим пару $(d, 0)$, где $d = \text{НОД}(a, b)$.

3. Не раскладывая числа на простые множители, вычислите:
 - а) $\text{НОД}(861, 637)$
 - б) $\text{НОД}(2014, 7813)$
 - в) $\text{НОД}(121, 759)$
4. Сократите дробь $5840383/34173679$.
5. Найдите:
 - а) $\text{НОД}(n, n + 1)$
 - б) $\text{НОД}(2n, 2n + 2)$
 - в) $\text{НОД}(3n, 6n + 3)$
 - г) $\text{НОД}(2n + 13, n + 7)$
6. На доске написаны числа a и b . Ваня заменяет одно из чисел на сумму или разность написанных чисел. Какое минимальное натуральное число он может получить за несколько таких операций, если:
 - а) $a = 1001, b = 759$;
 - б) $a = 7n + 3, b = 11n + 5$.
7. Возьмём прямоугольник $m \times n$ клеточек и будем раз за разом отрезать по клеточкам от него квадрат с максимально возможной стороной. В итоге получится квадрат. С какой стороной?
8. Найдите:
 - а) $\text{НОД}(10^7 - 1, 10^5 - 1)$;
 - б) $\text{НОД}(11 \dots 1 \text{ (} m \text{ единиц)}, 11 \dots 1 \text{ (} n \text{ единиц)})$;
 - в) $\text{НОД}(a^m - 1, a^n - 1)$.
9. Докажите, что $\text{НОД}(5a + 3b, 13a + 8b) = \text{НОД}(a, b)$.