

Доказательства от противного

Теорема 1 (принцип Дирихле). *Если по n клеткам рассадить $n + 1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит **больше одного** кролика.*

Теорема 2 (обобщенный принцип Дирихле). *Если по n клеткам рассадить более $k \cdot n$ кроликов, то найдется клетка, где сидит **больше k** кроликов.*

- а) В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся хотя бы двое, у которых фамилия начинается с одной буквы.
б) При каком наименьшем количестве учеников в школе среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?
- На 25 страницах книги 102 опечатки. Докажите, что на одной из них не менее 5 опечаток.
- В мешке лежат 4 красных и 2 синих шара. Какое наименьшее число шаров надо вытащить не глядя, чтобы среди них точно были такие шары:
а) 1 красный;
б) 1 синий;
в) 1 красный и 1 синий;
г) два одноцветных?
- У человека на голове не более 1 000 000 волос, а в Москве более 8 000 000 жителей. Докажите, что найдутся 8 москвичей с одинаковым числом волос.
- В школе 65 девятиклассников, и все они сдают по три экзамена, за каждый из которых можно получить оценку 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за все экзамены?
- 34 пассажира едут в автобусе, который делает 9 остановок, и на этих остановках новые пассажиры не заходят. Докажите, что на каких-то двух остановках выйдет одинаковое число пассажиров (может быть, ни одного).
- За 5 лет обучения студент сдал 31 экзамен, причем на каждом курсе он сдавал экзаменов больше, чем на предыдущем. На V курсе экзаменов было втрое больше, чем на I курсе. А сколько экзаменов было на IV курсе?
- Дано 7 отрезков с длинами от $1/10$ до 1. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.
- Никита разрезал лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков, потом один из трех получившихся кусков, и т. д. Докажите, что через несколько разрезов среди полученных многоугольников найдется 100 штук с одинаковым числом вершин.