

**Задача 1.** Плоскость разрезана на части  $n$  прямыми, где  $n > 3$  и не все прямые проходят через одну точку. Докажите, что хотя бы одна из частей – треугольник.

**Задача 2.** Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

**Задача 3.** На доске написаны два числа 1 и 1. Вписав между числами их сумму, мы получим числа 1, 2, 1. Повторив эту операцию ещё раз, получим числа 1, 3, 2, 3, 1. После трёх операций будут числа 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Какова будет сумма всех чисел на доске после ста операций?

**Задача 4.** Докажите, что  $2^n > n$  при любом натуральном  $n$ .

**Задача 5.** Найдите все натуральные  $n$ , при которых  $2^n > n^2$ .

**Задача 6.** Неравенство Бернулли. Докажите, что  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ , если  $a, n$  — натуральные.

**Задача 7.** Докажите, что  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ .

**Задача 8.** известно, что  $x + \frac{1}{x}$  целое число. Докажите, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  — также целое при любом целом  $n$ .