

Инвариант — это величина или свойство, которые не меняются при разрешённых в задаче действиях или одинаковы во всех возможных по условию задачи ситуациях. Например: чётность, делимость, раскраска, сумма или произведение каких-нибудь чисел.

Задача 1. а) Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля А1 на поле А8?

б) Тот же вопрос для шахматного коня.

Задача 2. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числу или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?

Задача 3. а) На столе стоят 4 стакана: три стоят правильно, а четвёртый — вверх дном. Разрешается одновременно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько таких операций поставить все стаканы вверх дном?

б) На доске написаны числа 0, 0, 0, 1. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли за несколько таких операций сделать все числа равными?

Задача 4. На доске написано число 12. Каждую минуту его умножают или делят либо на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано ровно через час, не будет равно 54.

Задача 5. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 20, 21. Можно стереть любые два числа a и b и записать число

а) $a + b$;

б) ab . Какое число получится после 20 таких действий?

г) Можно стереть любые два числа и записать их разность. Можно ли добиться того, чтобы в результате все числа на доске стали нулями?

д) Вопрос пункта г), если написаны натуральные числа от 1 до 2

Задача 6. На каждой из клеток доски размером 5×5 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку доски. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка на доске будет свободной.

Задача 7. Черный ящик работает так: любые три числа a , b и c , попадающие в него, он преобразует в числа $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$. Можно ли с помощью этого ящика из набора 1, 3, 8 получить числа -1 , 3, 9?

Задача 8. В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли быть, что ровно 19 из них делятся на 3?

Дополнительные задачи

Задача 9. По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными? Подсказка: рассмотрите диаметрально противоположные числа.

Задача 10. В колбу поместили 133 бактерии типа А, 135 бактерий типа В и 137 бактерий типа С. Если две бактерии разных типов соприкасаются, то они обе меняют свой тип на третий. Может ли оказаться, что через некоторое время все бактерии в колбе будут одного типа? Подсказка: подумайте про остатки от деления на 3

Задача 11. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.