

**Граф** — набор точек, некоторые из которых соединены отрезками. Точки называются вершинами графа, а отрезки рёбрами. На картинках рёбра могут изображаться не в виде отрезков, а просто линией, соединяющей вершины. Количество рёбер выходящих из вершины графа называется степенью этой вершины.

**Задача 1.** Гарри Поттер умеет превращать жабу в принцессу, гриб в жабу и грушу, грушу в яблоко, огрызок от яблока в котёнка и ёжика, котёнка в грушу или яблоко, ёжика в грушу, а яблоко — только в огрызок. Сейчас у него есть яблоко. Сможет ли он превратить его в принцессу?

**Задача 2.** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

**Задача 3.** В стране 1329 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

**Задача 4.** Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

**Задача 5.** В одном государстве из каждого города выходит по три дороги. Может ли быть в этом государстве а) 100 дорог? б) 100 городов?

**Задача 6.** В графе  $n$  вершин, и каждая соединена с каждой. Сколько рёбер в графе?

**Задача 7.** В марсианском метро 101 станция и 5000 перегонов между станциями. Докажите, что можно добраться с любой станции до любой другой.

**Задача 8.** Докажите, что среди любых шести человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

#### Дополнительные задачи

**Задача 9.** Докажите, что число людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

**Задача 10.** Докажите, что в любом графе есть по крайней мере две вершины одинаковой степени.