

Граф — набор точек, некоторые из которых соединены отрезками. Точки называются вершинами графа, а отрезки рёбрами. На картинках рёбра могут изображаться не в виде отрезков, а просто линией, соединяющей вершины. Количество рёбер выходящих из вершины графа называется степенью этой вершины.

Задача 1. Гарри Поттер умеет превращать жабу в принцессу, гриб в жабу и грушу, грушу в яблоко, огрызок от яблока в котёнка и ёжика, котёнка в грушу или яблоко, ёжика в грушу, а яблоко — только в огрызок. Сейчас у него есть яблоко. Сможет ли он превратить его в принцессу?

Задача 2. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Задача 3. В стране 1329 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

Задача 4. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

Задача 5. В одном государстве из каждого города выходит по три дороги. Может ли быть в этом государстве а) 100 дорог? б) 100 городов?

Задача 6. В графе n вершин, и каждая соединена с каждой. Сколько рёбер в графе?

Задача 7. В марсианском метро 101 станция и 5000 перегонов между станциями. Докажите, что можно добраться с любой станции до любой другой.

Задача 8. Докажите, что среди любых шести человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Дополнительные задачи

Задача 9. Докажите, что число людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечетное число рукопожатий, чётно.

Задача 10. Докажите, что в любом графе есть по крайней мере две вершины одинаковой степени.