НОД и НОК

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел a и b* — это наибольшее натуральное число c такое, что a делится на c и b делится на c. Обозначается НОД(a, b) или просто (a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.

Определение. *Наименьшее общее кратное целых чисел a и b* — это наименьшее натуральное число c такое, что c делится на a и c делится на b. Обозначается НОК(a, b) или $[a, b]$. Аналогично определяется НОК нескольких целых чисел.

Теорема 1. *Пусть числа a и b разложены на простые множители: $a = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, $b = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, где $m_i \geq 0$, $n_i \geq 0$. Тогда их НОД и НОК можно найти по формулам:*

$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{\min\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{m_k, n_k\}},$$
$$\text{НОК}(a, b) = p_1^{\max\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{m_k, n_k\}}.$$

Теорема 2. *Для любых двух целых чисел a и b имеет место равенство* НОД(a, b) · НОК(a, b) = $a \cdot b$.

1. Вычислите (без калькулятора!):
а) (8, 64) и [8, 64];
б) (36, 60) и [36, 60];
в) (125, 1534569) и [54, 163];
г) $(2^3 \cdot 3^{15} \cdot 7^{19}, 2^{31} \cdot 3^2 \cdot 11^3)$ и $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3]$

2. Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором — ⅔ объёма, а в третьем — ¾ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бака это возможно?

3. Ровно в полдень Клайв закрасил число 12 на циферблате часов красным цветом и решил через каждые 57 часов закрашивать текущий час в красный цвет.
а) Сколько чисел окажутся покрашенными через месяц?
б) А если Клайв будет красить их каждый 1913-й час в течение всей жизни?

4. а) Про натуральные числа a и b известно, что $15a = 14b$ и $(a, b) = 13$. Найдите a и b.
б) a и b — целые числа, удовлетворяющие равенству $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

5. а) Объясните, почему в теореме 1 можно считать, что числа a и b имеют один и тот же набор простых множителей $p_1, \dots, p_k$. (Обратите внимание, что некоторые m_i и n_i могут быть равны нулю!)
б) Докажите теорему 1.
в) С помощью теоремы 1 докажите теорему 2.
г) Когда НОК(a, b) = ab?

6. Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

По материалам: http://mmmf.msu.ru/circles/z8/3.html