

Остатки

Пусть $n = qd + r$, где n, d, q и r — целые числа, $1 \leq d$, $0 \leq r \leq d - 1$. Тогда число q называется **частным** от деления n на d , а число r называется **остатком** от деления n на d .

1. Найдите остатки от деления а) 4571645712423762319747 на 10; б) 2013 на 11; г) 2 на 5; в) -10 на 3.
2. Докажите, что сумма любых двух целых чисел и сумма их остатков имеют одинаковые остатки при делении на натуральное число d .
3. Докажите, что разность любых двух целых чисел и разность их остатков имеют одинаковые остатки при делении на натуральное число d .
4. Докажите, что произведение любых двух целых чисел и произведение их остатков имеют одинаковые остатки при делении на натуральное число d .
5. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом натуральном n .
6. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n .
7. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n .
8. Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n .
9. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечетном n .
10. Натуральные числа x, y и z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на три.
11. Сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 21. Докажите, что эта сумма делится на 441.
12. Сумма трех натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма их кубов тоже делится на 6.
13. Докажите, что сумма квадратов трех натуральных чисел не может иметь остаток 7 при делении на 8.
14. Сумма квадратов трех натуральных чисел делится на 9. Докажите, что из этих чисел можно выбрать два, разность квадратов которых делится на 9.
15. Найдите остатки от деления а) $2011 \cdot 2012 \cdot 2013 + 2013^3$ на 7; б) 9^{100} на 8; в) 7^{101} на 8; г) 13^{2013} на 10; д) 10^{2013} на 7.