

Простые числа

Определение. Простое число — это натуральное число, большее единицы, которое делится нацело только на единицу и на само себя. Остальные натуральные числа, большие единицы, называют *составными*. Единицу не относят ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 1. Чтобы проверить, является ли натуральное число n составным, достаточно проверить, делится ли оно на какое-нибудь из простых чисел, не превосходящих \sqrt{n} .
(По определению \sqrt{n} — это такое неотрицательное число, что $(\sqrt{n})^2 = n$.)

Теорема 2 (основная теорема арифметики). Каждое натуральное число можно разложить на простые множители, причём такое разложение единственно с точностью до перестановки этих множителей.

1. Являются ли простыми следующие числа: 79; 461; 1001; 2817? Составные числа разложите на простые множители.
2. Представьте число 200000 в виде произведения двух чисел, в десятичной записи которых нет нулей.
3.
 - а) Может ли число 2^n оканчиваться нулём при каком-нибудь натуральном n ?
 - б) Может ли квадрат натурального числа оканчиваться ровно пятью нулями?
4. Натуральное число умножили на произведение его цифр и получили: а) 1533; б) 366. Найдите исходное число в каждом из этих случаев.
5. Сколько различных делителей у числа: а) 81; б) 36; в) $2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^5$; г) $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ (p, q, r — различные простые числа, a, b, c — натуральные)?
6. Приведите пример целого числа, у которого ровно 2014 делителей.
7. Число $2n$ имеет ровно 15 различных натуральных делителей. Сколько различных натуральных делителей может иметь число n ?
8. Сколько существует различных натуральных чисел, у которых самый большой делитель, не считая самого числа, равен 55?
9. Докажите, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число делителей.
10. Квадрат натурального числа умножили на куб другого натурального числа. Могло ли в результате получиться: а) 112? б) 175830?
11. Вычеркните из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100!$ один из факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа.