

## Простые числа

**Определение.** *Простое число* — это натуральное число, большее единицы, которое делится нацело только на единицу и на само себя. Остальные натуральные числа, большие единицы, называют *составными*. Единицу не относят ни к простым, ни к составным числам.

**Теорема 1.** *Чтобы проверить, является ли натуральное число  $n$  составным, достаточно проверить, делится ли оно на какое-нибудь из простых чисел, не превосходящих  $\sqrt{n}$ . (По определению  $\sqrt{n}$  — это такое неотрицательное число, что  $(\sqrt{n})^2 = n$ .)*

**Теорема 2 (основная теорема арифметики).** *Каждое натуральное число можно разложить на простые множители, причём такое разложение единственно с точностью до перестановки этих множителей.*

1. Являются ли простыми следующие числа: 79; 461; 1001; 2817? Составные числа разложите на простые множители.
2. Представьте число 200000 в виде произведения двух чисел, в десятичной записи которых нет нулей.
3. а) Может ли число  $2^n$  оканчиваться нулём при каком-нибудь натуральном  $n$ ?  
б) Может ли квадрат натурального числа оканчиваться ровно пятью нулями?
4. Натуральное число умножили на произведение его цифр и получили: а) 1533; б) 366. Найдите исходное число в каждом из этих случаев.
5. Сколько различных делителей у числа: а) 81; б) 36; в)  $2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^5$ ; г)  $p^a \cdot q^b \cdot r^c$  ( $p, q, r$  — различные простые числа,  $a, b, c$  — натуральные)?
6. Приведите пример целого числа, у которого ровно 2014 делителей.
7. Число  $2n$  имеет ровно 15 различных натуральных делителей. Сколько различных натуральных делителей может иметь число  $n$ ?
8. Сколько существует различных натуральных чисел, у которых самый большой делитель, не считая самого числа, равен 55?
9. Докажите, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число делителей.
10. Квадрат натурального числа умножили на куб другого натурального числа. Могло ли в результате получиться: а) 112? б) 175830?
11. Вычеркните из произведения  $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100!$  один из факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа.