Элементарная теория чисел: итоги

Определение. *Простое число* — это натуральное число, большее единицы, которое делится нацело только на единицу и на само себя. Остальные натуральные числа, большие единицы, называют *составными*. Единицу не относят ни к простым, ни к составным числам.

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел a и b* — это наибольшее натуральное число c такое, что a делится на c и b делится на c. Обозначается НОД(a, b) или просто (a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел. Целые числа a и b называются *взаимно простыми*, если НОД$(a, b) = 1$.

Определение. *Наименьшее общее кратное целых чисел a и b* — это наименьшее натуральное число c такое, что c делится на a и c делится на b. Обозначается НОК(a, b) или $[a, b]$. Аналогично определяется НОК нескольких целых чисел.

Основная теорема арифметики. *Каждое натуральное число можно разложить на простые множители, причём такое разложение единственно с точностью до перестановки этих множителей.*

Теорема. Пусть числа a и b разложены на простые множители: $a = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, $b = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, где $m_i \geq 0$, $n_i \geq 0$. Тогда их НОД и НОК можно найти по формулам: НОД(a, b) $= p_1^{\min\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{m_k, n_k\}}$, НОК(a, b) $= p_1^{\max\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{m_k, n_k\}}$.

Шаг алгоритма Евклида. Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Поделим a и b с остатком: $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Тогда НОД(a, b) = НОД(b, r).

Алгоритм Евклида. Для вычисления НОД(a, b) начнём с пары чисел (a, b) и будем применять шаг алгоритма Евклида. При каждом переходе от пары (*делимое, делитель*) к паре (*делитель, остаток*) оба числа в паре уменьшаются, а их НОД сохраняется. В некоторый момент получим пару $(d, 0)$, где d = НОД(a, b).

2.4. Натуральное число умножили на произведение его цифр и получили: а) 1533; б) 366. Найдите исходное число в каждом из этих случаев.

2.5. Сколько различных делителей у числа: а) 81; б) 36; в) $2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^5$; г) $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ (p, q, r — различные простые числа, a, b, c — натуральные)?

2.10. Квадрат натурального числа умножили на куб другого натурального числа. Могло ли в результате получиться: а) 112? б) 175830?

3.2. Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором — ⅔ объёма, а в третьем — ¾ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бака это возможно?

3.3. Ровно в полдень Клайв закрасил число 12 на циферблате часов красным цветом и решил через каждые 57 часов закрашивать текущий час в красный цвет.
а) Сколько чисел окажутся покрашенными через месяц?
б) А если Клайв будет красить их каждый 1913-й час в течение всей жизни?

3.4. а) Про натуральные числа a и b известно, что $15a = 14b$ и $(a, b) = 13$. Найдите a и b.
б) a и b — целые числа, удовлетворяющие равенству $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

4.4. Сократите дробь 5840383/34173679.

4.6. На доске написаны числа a и b. Ваня заменяет одно из чисел на сумму или разность написанных чисел. Какое минимальное натуральное число он может получить за несколько таких операций, если:
а) $a = 1001$, $b = 759$;
б) $a = 7n + 3$, $b = 11n + 5$.

4.9. Докажите, что НОД$(5a + 3b, 13a + 8b)$ = НОД(a, b).

По материалам: http://mmmf.msu.ru/circles/z8/