

Малый мехмат

Занятие №9

преп: Кожевин А. А.

1. Найдите последнюю цифру числа:
 - (a) 2015^{2015} ,
 - (b) 549^{49} ,
 - (c) 345673^{345673} ,
 - (d) $77^{77^{77}}$.
2. Что больше: сумма длин сторон четырёхугольника или сумма длин его диагоналей?
3. Пусть дан выпуклый четырёхугольник. Найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин четырёхугольника минимальна.
4. **(7 класс)** На прямоугольном куске хлеба лежит кружок колбасы. Как разрезать (по прямой) этот бутерброд на две части, чтобы и хлеб и колбаса делились поровну?
5. **(7 класс)** За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа - мальчики.
6. **(7 класс)**
 - (a) Найдите сумму чётных чисел в промежутке от 12 до 180,
 - (b) Найдите сумму чисел делящихся на 7 в промежутке от 1 до 150,
 - (c) Найдите сумму чисел делящихся на 5 с остатком 2 в промежутке от 3 до 100.
7. **(8-9 класс)** Найдите все решения уравнений в целых числах:
 - (a) $x - y = 0$,
 - (b) $3x - 5y = 0$,
 - (c) $15x - 9y = 0$.
8. **(8-9 класс)** Решите уравнение $5x - 7y = 3$ в целых числах «по шагам»:
 - (a) найдите какое-нибудь одно решение (x_0, y_0) , то есть такие целые числа x_0 и y_0 , чтобы выполнялось равенство $5x_0 - 7y_0 = 3$,
 - (b) докажите, что если (x, y) — любое решение уравнения $5x - 7y = 3$, то $5(x - x_0) - 7(y - y_0) = 0$ (здесь (x_0, y_0) — решение, найденное в пункте (a)),
 - (c) найдите все решения уравнения $5z - 7t = 0$ в целых числах,
 - (d) найдите все решения уравнения $5x - 7y = 3$ в целых числах.
9. **(8-9 класс)** Существует ли число, которое делится ровно на 50 чисел из набора $1, 2, \dots, 100$?

10. **(8-9 класс)** Доказать неравенство $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, где $x_1, \dots, x_n$ — произвольные числа.

11. **(8-9 класс)** Доказать, что если $a > 0, b > 0, c > 0$, то выполнено неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

причём знак равенства имеет место лишь при $a = b = c$.

12. **(8-9 класс)** Доказать неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$.