

Малый мехмат

Занятие №13

преп: Кожевин А. А.

1. На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке, и каждая либо снимает, либо вешает ровно один платок. Может ли после ухода девочек на вешалке остаться 10 платков? А сколько могло быть девочек, если осталось 10 платков?
2. На окружности расставлено несколько чисел, причем каждое равно среднему арифметическому соседних с ним чисел. Докажите, что все числа равны.
3. Докажите геометрически равенства:
 - (a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - (b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - (c) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
 - (d) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 - (e) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 - (f) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 - (g) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
4. Среди математиков каждый седьмой - философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?
5. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если сумма цифр-названий этих городов, делится на 4. Можно ли добраться из города 2 в город 8?
6. В графе каждая вершина покрашена в зеленый или синий цвет. Известно, что каждая синяя вершина соединена с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными. Каких вершин больше: синих или зеленых?
7. В графе вершины пронумерованы числами от 1 до 30, причем вершины соединены ребром, если одно из чисел, записанных в этих вершинах, делится на другое. Сколько компонент связности в этом графе?
8. Сколько ребер в полном графе с 10 вершинами? Сколько вершин в полном графе с 78 ребрами?